

11.5 → 07.

М. 11324

математика

285 из 350 80%

# Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

## 11 класс

11.1. Разменный аппарат меняет одну монету на 5 других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 55 монет?

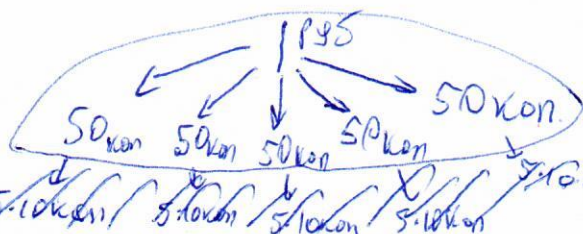
11.2. Существуют ли два целых числа, сумма кубов которых равна 2021?

11.3. Внутри круга радиуса 15 взята точка  $M$  на расстоянии 13 от центра. Через точку  $M$  проведена хорда, равная 18. Найдите отрезки, на которые делится хорда точкой  $M$ .

11.4. Многочлен  $P(x) = x^8 + x^7 + \dots + x^2 + x + 1$ . Удвойте у него несколько (больше одного) коэффициентов так, чтобы полученный многочлен представлялся в виде произведения двух многочленов степени больше первой каждый.

11.5. Фокусник для выступления поместил в волшебную шляпу 100 лент: белые, синие, зеленые. При подготовки номера выяснилось, что из 81 вытащенной произвольным образом ленты, обязательно найдутся три разноцветных. И теперь фокусник думает, какое наименьшее число лент надо достать из шляпы, чтобы среди них точно было две разноцветных?

11.1



Каждый рубль размен на 50 копеек. Разменяем на 100 копеек.

50 руб. → 500 коп. 25 руб. → 250 коп. Далее мы

В раз мы добавляем по 4 монеты: 5 руб. → 4 + 5 = 9 → 3 + 10 = 13 → 2 + 15 = 17 →

→ 1 + 20 = 21 → 0 + 25 = 25. → искомое число  $n$  для разменять такое, что  $(n-1):4$

Решение:  $\frac{55-1}{4} = \frac{54}{4} = 13,5$  - не целое число, значит металлический рубль нельзя поменять на 55 монет.

Ответ: Нельзя разменять металлический рубль на 55 монет.

11.4.  $P^*(x)$ ?

$$P(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$P^*(x) = 2x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4}$$

Ответ:  $P^*(x) = x^4 \left( 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right)$

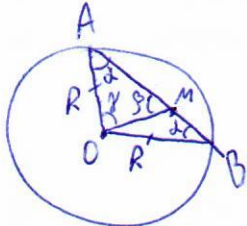


н.п.3.

если вытаскивать в 1 ленту, то есть 3 разное цвет, то если вытаскивать в 2 ленту, то не обязательно 3 разное цвет. Пусть  $\Rightarrow$  будет хотя бы 2 цвета по принципу Дирихле. тогда пусть это белый и синий  $S \Rightarrow b + S = 80$ . Значит  $S$ . по усл.  $S + b + g = 100$ ;  $80 + g = 100 \Rightarrow g = 20$ . Тогда если мы вытаскиваем на одну больше (2 ленту), то там точно будет 2 разное цвет. по принципу Дирихле.  
 Ответ: 21 лента

05

н.п.3



Дано: окруж. с ц. в т. О и радиусом  $R = 15$ .  
 $OM = 13$ , хорда  $AB$ ,  $M \in AB$ ,  $AB = 18$ .

Найти:  $AM$  и  $MB$ .

Решение.

ОА и ОВ.

По усл. проведем хорду  $AB$  ч/з т. М. и проведем радиусы в т. Кос. А и В с окруж.  $\triangle OAB - \text{р/б}$ , т.к. там 2 радиуса, а они равны.  $\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha$ , т.к.  $\sum \text{углы} = 180^\circ$ .

по т. Синусов в  $\triangle AOB$ :  $\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$

$$\frac{15}{\sin \alpha} = \frac{18}{\sin 2\alpha}; \quad \frac{15}{\sin \alpha} = \frac{18^2}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$15 = \frac{9}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

по ОТТ:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\sin^2 \alpha + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

(отриц. Синусов не купеем, т.к. в геометрии все стороны положительны).

по т. Синусов в  $\triangle AOM$ :  $\frac{13}{\sin \alpha} = \frac{AM}{\sin \beta}$ ;  $\frac{13}{\frac{4}{5}} = \frac{AM}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \sin \beta = \frac{12}{13}$

~~$180^\circ = \alpha + \beta + \gamma$  в  $\triangle AOM$~~

~~по т. косинусов в  $\triangle AOM$ :  $OM^2 = AO^2 + AM^2 - 2 \cdot AO \cdot AM \cdot \cos \alpha$~~   
 ~~$13^2 = 15^2 + AM^2 - 30 \cdot AM \cdot \frac{3}{5}$~~   
 ~~$AM^2 - 18 \cdot AM + 56 = 0$~~   
 ~~$\frac{D}{4} = 9 - 56 = -47$~~

продолжение на след. листе



45 N11.2.

$1^3=1$     $3^3=27$     $5^3=125$     $7^3=343$     $9^3=729$     $11^3=1331$     $13^3=2197$   
 $2^3=8$     $4^3=64$     $6^3=216$     $8^3=512$     $10^3=1000$     $12^3=1728$

Заметим, что  $2021$  не является кубом числом  $2021$  не является  $\Rightarrow$  одно число

для него есть отриц. <sup>тогда</sup> ~~число~~ представим в виде  $2 \times$  <sup>разности кубов</sup> ~~чисел~~ <sup>чисел</sup>.

$x^3 - y^3 = 2021$ ,  $27^3 = 27^2 \cdot 27 = 729 \cdot 27 = 19683$

$$\begin{array}{r} 729 \\ \times 27 \\ \hline 5103 \\ + 1458 \\ \hline 19683 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 676 \\ \times 26 \\ \hline 4056 \\ + 1832 \\ \hline 17576 \end{array}$$

$26^3 = 17576$

$$\begin{array}{r} 19683 \\ - 17576 \\ \hline 2107 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \quad 169 \\ \times 12 \quad \times 13 \\ \hline 288 \quad 507 \\ + 144 \quad 169 \\ \hline 1728 \quad 2197 \end{array}$$

$27^3 - 26^3 = 19683 - 17576 = 2107 > 2021 \quad (*)$

$25^3 = 25^2 \cdot 25 = 625 \cdot 25$ ;  $\times \begin{array}{r} 625 \\ 25 \\ \hline 3125 \\ + 1250 \\ \hline 15625 \end{array}$

$$\begin{array}{r} 17576 \\ - 15625 \\ \hline 1951 \end{array}$$

$26^3 - 25^3 = 17576 - 15625$

$26^3 - 25^3 = 1951 < 2021 \quad (**)$

Из (\*) и (\*\*) видно, что разность  $2 \times$  идущих друг за другом кубов чисел не даёт 2021.

выпишем кубы остальных чисел от 14 до 24.

$$\begin{array}{r} 186 \\ \times 14 \\ \hline 784 \\ + 196 \\ \hline 2744 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 15 \\ \hline 1125 \\ + 225 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ \times 16 \\ \hline 1536 \\ + 256 \\ \hline 4096 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 17 \\ \hline 2023 \\ + 289 \\ \hline 4913 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 18 \\ \hline 2592 \\ + 324 \\ \hline 5832 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \\ \times 19 \\ \hline 3249 \\ + 361 \\ \hline 6859 \end{array}$$

$20^3 = 8000$

$$\begin{array}{r} 441 \\ \times 21 \\ \hline 441 \\ + 882 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 484 \\ \times 22 \\ \hline 968 \\ + 968 \\ \hline 10648 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 529 \\ \times 23 \\ \hline 1587 \\ + 1058 \\ \hline 12167 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 576 \\ \times 24 \\ \hline 2304 \\ + 1152 \\ \hline 13824 \end{array}$$

Из всего этого невозможно получить какими-либо комбинациями разности кубов число 2021.

Ответ: не существует 2-х чисел, сумма кубов которых

76. нп. 4. М. 11324  
 $P(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

узнаем некоторые коэффициенты:  $2x^6 + x^7 + x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + x^2 + 1 = P^*(x)$

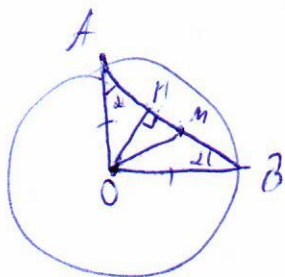
$$P^*(x) = x^6(2x^2 + x + 1) + x^3(2x^2 + x + 1) + (2x^2 + x + 1)$$

$$P^*(x) = (x^6 + x^3 + 1)(2x^2 + x + 1)$$

Ответ:  $(x^6 + x^3 + 1)(2x^2 + x + 1) = P^*(x)$  - искомым многочлен

нп. 3 (продолжение)

Проверим высоту  $OH$  к хорде  $AB$ .



Тогда  $\triangle OHA$  - прямоугольный  $\Rightarrow \sin \alpha = \frac{OH}{OA} = \frac{4}{5}$

$$OH = \frac{4 \cdot OA}{5} = 12$$

$$\cos \angle HOM = \frac{OH}{OM} = \frac{12}{13}$$

$$\sin^2 \angle HOM + \cos^2 \angle HOM = 1 \Rightarrow \sin^2 \angle HOM = 1 - \frac{12^2}{13^2} = \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$\sin \angle HOM = \frac{5}{13} \text{ (отриц. значение не подходит)}$$

$$\sin \angle HOM = \frac{HM}{OM} = \frac{5}{13} \Rightarrow HM = \frac{5 \cdot OM}{13} = 5$$

$$\text{В } \triangle OAH \text{ tg } \alpha = \frac{OH}{AH}, \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad | : \cos^2 \alpha \neq 0$$

$$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad \text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{25}{9}$$

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{16}{9} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$$

(отриц. тангенс не подходит)

$$\frac{4}{3} = \frac{OH}{AH} = \frac{12}{AH} \Rightarrow AH = \frac{3 \cdot 12}{4} = 9$$

$$AM = AH + HM = 9 + 5 = 14. \quad MB = AB - AM = 4.$$

Ответ: хорда делится точкой  $M$  на отрезки длиной 14 и 4.



М-1067

1/2 11.2 и 11.5

180. 118350 57%

45

Пример

Дано: окруж.  $(O; R)$ , круг  
 $R = 15$   
 $OM = 13$   
 $AB$  - хорда  
 $AB = 18$

Найти:  $MB, AM$

Решение

1. Построим хорду  $KN$ , проходящую через центр окружности (по условию задачи дан круг) - т.о, т.е.  $KN$  - диаметр, и пересекающую <sup>данную</sup> хорду в т.  $M$ .  
 Тогда  $KM = KO + OM = R + OM = 15 + 13 = 28$   
 $MN = ON - OM = R - OM = 15 - 13 = 2$

$AB = 18 \Rightarrow MB = AB - AM = 18 - AM$

2. Так как хорды  $KN$  и  $AB$   $\cap$  в  $M$ , то  $KM \cdot MN = AM \cdot MB$

$28 \cdot 2 = AM(18 - AM)$

$56 = -AM^2 + 18AM \quad | \cdot (-1)$

$AM^2 - 18AM + 56 = 0$

$k = -9, D_1 = 81 - 56 = 25$

$AM_1 = 9 + 5 = 14$

$AM_2 = 9 - 5 = 4$

1)  $AM = 14$

$MB = 18 - 14 = 4$

2)  $AM = 4$

$MB = 18 - 4 = 14$

Тогда отрезки, на которые делится данная хорда точкой  $M$ , равны 4 и 14

Ответ: 4; 14

н1

По условию задачи разменной аппарат мензет 1 монету на 5 других, но номинал остаётся прежним.

Тогда 1 рубль (равный 100 коп.) нельзя разменять на 5 монет так, чтобы номинал остался прежним; используя монеты по 1 коп. (не используются, но вырезаются), по 5 коп. (так же, как и с 1 коп.), по 10 коп. и 50 копеек

1)  $\begin{matrix} 1 & \rightarrow & 10к \\ & \searrow & \rightarrow 10к \\ 50к & \rightarrow & 10к \end{matrix} \Rightarrow$  потеря 10 коп., номинал не сохранился

45

2)  $\begin{matrix} 1 & \rightarrow & 5к \\ & \searrow & \rightarrow 50к \\ 10к & \rightarrow & 10к \end{matrix} \Rightarrow$  потеря 15 коп., номинал не сохранился

и другие варианты разложения. Следовательно, металлический рубль невозможно разменять на 55 монет при помощи данного аппарата.

Ответ: нет, нельзя

н4

45

Степень многочлена - это степень старшего члена многочлена, т.е. если  $M(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^0$ , то степень многочлена  $M(x)$  равна  $n$ .

Тогда  $P_1(x) = F(x) \cdot G(x)$ , где  $P_1(x)$  - многочлен  $P(x)$  с некоторыми увеличенными коэффициентами,  $F(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^0 + 1$ ,  $G(x) = x^m + x^{m-1} + \dots + 1$ ,  $n$  и  $m > 1$

Пусть  $F(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  и  $G(x) = x^2 + 1$ . Тогда

$$P_1(x) = F(x) \cdot G(x) = (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + 1) = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^8 + x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$$

Таким образом, чтобы многочлен  $P(x) = x^8 + x^7 + \dots + x^2 + x + 1$  получился, т.е.  $P(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ , можно было представить в виде произведения двух многочленов степени больше первой каждой, то есть в виде многочлена  $P_1(x)$ , необходимо удвоить коэффициенты перед  $x^6, x^5, x^4, x^3$  и  $x^2$ .

Ответ:  $P(x) = x^8 + x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ , то есть нужно удвоить коэффициенты перед  $x^6, x^5, x^4, x^3$  и  $x^2$  исходного многочлена.