

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

10 класс

10.1. Разменный аппарат меняет одну монету на 5 других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 55 монет?

10.2. Чему равно $x^3 + 3xy + y^3$, если $x + y = 1$?

10.3. 10 ребят договорились, что каждый из них будет либо лжецом (лжецы всегда лгут), либо правдивцем (правдивцы всегда говорят правду). Известно, что каждый из них любит ровно один вид сока: яблочный, апельсиновый или гранатовый. Сначала ведущий попросил поднять руки тех, кто любит яблочный сок, и все подняли руки, потом тех, кто любит апельсиновый сок — и половина игроков подняли руки, потом тех, кто любит гранатовый — и руку поднял только один игрок. Сколько правдивцев среди игроков?

10.4. В треугольнике MNK точки E и F расположены на сторонах MN и NK соответственно. Треугольник ENF остроугольный, и ER , FS — его высоты. Докажите, что если около четырехугольника $MEFK$ можно описать окружность, то $SR \parallel MK$.

10.5. Фокусник для выступления поместил в волшебную шляпу 100 лент: белые, синие, зеленые. При подготовки номера выяснилось, что из 81 вытащенной произвольным образом ленты, обязательно найдутся три разноцветных. И теперь фокусник думает, какое наименьшее число лент надо достать из шляпы, чтобы среди них точно было две разноцветных?

10.1. Рассмотрим процесс размена монет (для конкретного случая): была 1 монета.
 $1 \xrightarrow{\text{размен}} 5$ монет, затем из 5 монет заберем 1, и снова монет на 5. Итоговое число монет: $(5-1)+5=9$. В следующем размене будет: $(9-1)+5=13$. Можно уже увидеть закономерность: при каждом размене, число монет увеличивается на 4. Будем получать 55 монет. Одна монета уже была. Следовательно, число $(55-1)$ должно быть кратно 4. Число 54 не кратно 4. Отсюда следует, что получить 55 монет невозможно.
 Ответ: нет, разменять 1 монету на 55 кельз.

10.2. По условию: $x + y = 1$, тогда $(x+y)^3 = 1^3$.
 $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 1$
 $x^3 + y^3 = 1 - 3x^2y - 3xy^2$
 $x^3 + y^3 = 1 - 3xy(x+y)$, $x+y=1$, тогда:
 $x^3 + y^3 = 1 - 3xy \cdot 1$
 $x^3 + 3xy + y^3 = 1$
 Ответ: $x^3 + 3xy + y^3 = 1$

1-7
2-7
3-7
4-3
5-0

245

69%

10.3 На вариант про этический сек поданы все: 10 человек. Получается, что часть из них - итецы, часть - правдивцы. На вариант "апельсиновый" поданы руки половина: 5 человек. Т.е. в 1 варианте поданы руки все, но не, кто подает руки на варианте 2, итецы. На вариант "трактовый", руку подает 1 человек. Аналогично второму, ^{варианту} ~~все~~, человек, который подает руку - итец.

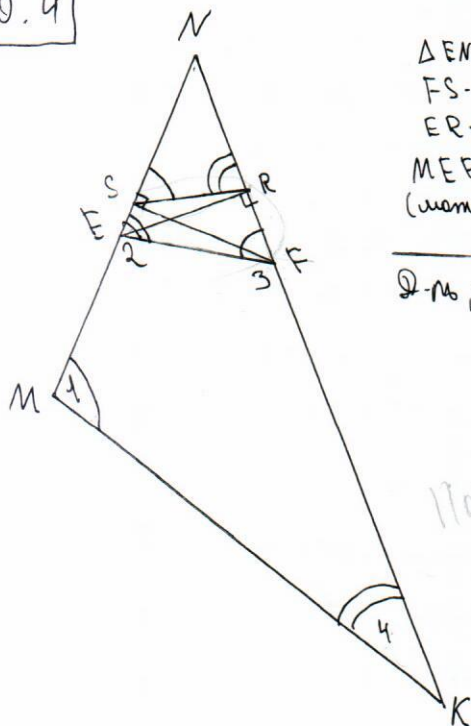
Из 10 человек итецы $5+1=6$. Правдивцев: $10-6=4$

Ответ: 4 правдивца.

10.5 Всего было вытаскива 81 лент. В них были все 3 цвета. Из этого следует, что какого цвета было меньше 1, $81-1-1-1=78$, 78 лент были какого-то (каких-то) цветов. Исходя из утверждения, что среди этих 78 лент, встречается как минимум 1 цвет. Тогда, для парадокса того, чтобы при вытаскивании 81 ленты было 2 цвета, нужно добавить 1 ленту. Однако, ~~и~~ возможно, ~~из~~ цвет какой-то 78 лент будет совпадать с цветом одной противоположной ленты. Тогда надо будет взять еще одну ленту. ~~и~~ Итого все равно лент: $78+1+1=80$

Ответ: 80 лент.

10.4



Дано:
 $\triangle ENF$ - острый,
 FS - высота
 ER - высота
 $MEFC$ - вписанный
 (можно описать окружн.)
 Д-но, что $SR \parallel MK$

Доказание:

т.к. $MKFE$ - вписанный и ~~вокруг~~ можно описать окружн. ~~нельзя~~ (по условию) $\Rightarrow \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ (по св-ву)

$$\angle EFR = 180 - \angle 3 \quad \Rightarrow \quad \angle EFR = \angle 1$$

$$\angle 1 = 180 - \angle 3 \text{ (сумм.)}$$

$$\angle FES = 180 - \angle 2 \quad \Rightarrow \quad \angle FES = \angle 4$$

$$\angle 4 = 180 - \angle 2 \text{ (сумм.)}$$

Рассмотрим $SRFE$, $SRFE$ - вписанный (по определению)

\Rightarrow вокруг него можно описать окружн.

$$\Rightarrow \angle SEF + \angle SRF = \angle RFE + \angle ESR = 180^\circ \text{ (по св-ву)}$$

$$\angle NRS = 180 - \angle SRF \quad \Rightarrow \quad \angle NRS = \angle SEF$$

$$\angle SEF = 180 - \angle SRF \text{ (сумм.)}$$

$$\angle NSR = 180 - \angle ESR$$

$$\angle RFE = 180 - \angle ESR \text{ (сумм.)} \quad \Rightarrow \quad \angle NSR = \angle RFE$$

$$\angle FES = \angle 4$$

$$\angle FES = \angle NRS \quad \Rightarrow \quad \angle 4 = \angle NRS$$

$\angle 4 = \angle NRS \Rightarrow$ соответственные углы при параллельных прямых SR и MK и секущей $KR \Rightarrow SR \parallel MK$

т.м.г.

11-10/84

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

10 класс

1-7

2-7

3-7

4-0

5-0

218.

10.1. Разменный аппарат меняет одну монету на 5 других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 55 монет?

10.2. Чему равно $x^3 + 3xy + y^3$, если $x + y = 1$?

10.3. 10 ребят договорились, что каждый из них будет либо лжецом (лжецы всегда лгут), либо правдивцем (правдивцы всегда говорят правду). Известно, что каждый из них любит ровно один вид сока: яблочный, апельсиновый или гранатовый. Сначала ведущий попросил поднять руки тех, кто любит яблочный сок, и все подняли руки, потом тех, кто любит апельсиновый сок – и половина игроков подняли руки, потом тех, кто любит гранатовый – и руку поднял только один игрок. Сколько правдивцев среди игроков?

10.4. В треугольнике MNK точки E и F расположены на сторонах MN и NK соответственно. Треугольник ENF остроугольный, и ER , FS – его высоты. Докажите, что если около четырехугольника $MEFK$ можно описать окружность, то $SR \parallel MK$.

10.5. Фокусник для выступления поместил в волшебную шляпу 100 лент: белые, синие, зеленые. При подготовки номера выяснилось, что из 81 вытасненной произвольным образом ленты, обязательно найдутся три разноцветных. И теперь фокусник думает, какое наименьшее число лент надо достать из шляпы, чтобы среди них точно было две разноцветных?

№ 10.4 10.3

Ябл. сок - 10 (чел)

Апел. сок - $\frac{10}{2} = 5$ (чел)

Гран. сок - 1

$10 + 5 + 1 = 16$ - раз подняли руку

1 человек - 1 сок = 7 $16 - 10 = 6$ = 6 человек сказали =>

=> $10 - 6 = 4$ - игроков

Ответ: 4 правдивца.

10.5.

$$\begin{matrix} \delta \\ c \\ z \end{matrix} \} 100$$

1. Из 81 - р/у \Rightarrow max. замена - $\delta_{ис} / c_{из} / \delta_{из} \Rightarrow$

$\Rightarrow 100 - 80 = 20$ - цент одного из цветов

2. Допустим, фокусник каждый раз вытаскивал тот цвет ленты, которого 20 (из п.1.) \Rightarrow 2-ая лента будет другого цвета \Rightarrow нужно достать ~~из~~ минимум 21 ленту, чтобы было 2 цвета ленты

3. ~~Допустим, фокусник по очереди доставал~~

Ответ: 21.

10.1.

Нет, металлический рубль нельзя разменять на 55 монет, т.к.

$1 \rightarrow 5 \Rightarrow + 4$ монеты

$$(55 - 1) / 4 \text{ не к.т.}$$

10.2.

$$x^3 + 3xy + y^3 \text{ при } x+y=1$$

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) + 3xy = (x+y)(x^2 - xy + y^2 + 3xy) =$$

$$= x(x+y) + \dots = x^2 - xy + y^2 + 3xy, \text{ т.к. } x+y=1,$$

$$x^2 - xy + y^2 + 3xy = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

$$x+y=1 \Rightarrow (x+y)^2 = 1^2 = 1$$

Ответ: 1.

М 10210

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

10 класс

1 2 3 4 5 Итого
7 7 7 8 8 21

10.1. Разменный аппарат меняет одну монету на 5 других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 55 монет?

10.2. Чему равно $x^3 + 3xy + y^3$, если $x + y = 1$?

10.3. 10 ребят договорились, что каждый из них будет либо лжецом (лжецы всегда лгут), либо правдивцем (правдивцы всегда говорят правду). Известно, что каждый из них любит ровно один вид сока: яблочный, апельсиновый или гранатовый. Сначала ведущий попросил поднять руки тех, кто любит яблочный сок, и все подняли руки, потом тех, кто любит апельсиновый сок – и половина игроков подняли руки, потом тех, кто любит гранатовый – и руку поднял только один игрок. Сколько правдивцев среди игроков?

10.4. В треугольнике MNK точки E и F расположены на сторонах MN и NK соответственно. Треугольник ENF остроугольный, и ER , FS – его высоты. Докажите, что если около четырехугольника $MEFK$ можно описать окружность, то $SR \parallel MK$.

10.5. Фокусник для выступления поместил в волшебную шляпу 100 лент: белые, синие, зеленые. При подготовки номера выяснилось, что из 81 вытащенной произвольным образом ленты, обязательно найдутся три разноцветных. И теперь фокусник думает, какое наименьшее число лент надо достать из шляпы, чтобы среди них точно было две разноцветных?

В) 1) Все правдивцы подняли руки. Все лжецы подняли руки \Rightarrow всем правдивцам нравится только ябл. сок и всем лжецам не нравится ябл. сок.
2) Правдивцы не поднимают, т.к. им нравится ябл. сок.
3) Лжецы могут ~~поднимать~~ поднять руку \Rightarrow не любят ябл. сок.
4) Лжецы поднимают руку \Rightarrow им не нравится ни гранатовый ни яблочный \Rightarrow нравится апельсиновый. Одному лжецу \Rightarrow остальные, не поднявшие руку на апельсин. – правдивцы. $5 - 1 = 4$
Ответ: 4 правдивца.

$$\begin{aligned} \text{N2)} \quad (x+y)^3 &= 1^3 \\ x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 &= 1 \\ 1 - 3xy(x+y) &= x^3 + y^3 \\ &\quad \quad \quad \parallel \\ &\quad \quad \quad 1 \end{aligned}$$

$$x^3 + 3xyx + y^3 = 1$$

Ответ: 1

$$1 - 3xy = x^3 + y^3$$

N4) Ответ: нет, не раскладывается.

$$n, k \quad n=4$$

$$a_1=1$$

$$1 + 4^n = 55 \quad ?$$

$$4^n \neq 54$$

М 10243

1 2 3 4 5 Итого
7 7 X 0 21

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

10 класс

10.1. Разменный аппарат меняет одну монету на 5 других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 55 монет?

10.2. Чему равно $x^3 + 3xy + y^3$, если $x + y = 1$?

10.3. 10 ребят договорились, что каждый из них будет либо лжецом (лжецы всегда лгут), либо правдивцем (правдивцы всегда говорят правду). Известно, что каждый из них любит ровно один вид сока: яблочный, апельсиновый или гранатовый. Сначала ведущий попросил поднять руки тех, кто любит яблочный сок, и все подняли руки, потом тех, кто любит апельсиновый сок – и половина игроков подняли руки, потом тех, кто любит гранатовый – и руку поднял только один игрок. Сколько правдивцев среди игроков?

10.4. В треугольнике MNK точки E и F расположены на сторонах MN и NK соответственно. Треугольник ENF остроугольный, и ER , FS – его высоты. Докажите, что если около четырехугольника $MEFK$ можно описать окружность, то $SR \parallel MK$.

10.5. Фокусник для выступления поместил в волшебную шляпу 100 лент: белые, синие, зеленые. При подготовки номера выяснилось, что из 81 вытащенной произвольным образом ленты, обязательно найдутся три разноцветных. И теперь фокусник думает, какое наименьшее число лент надо достать из шляпы, чтобы среди них точно было две разноцветных?

~ 10.2

$$x + y = 1, \Rightarrow x = 1 - y$$

$$x^3 + 3xy + y^3 = (1 - y)^3 + 3y(1 - y) + y^3 = 1 - 3y + 3y^2 - y^3 + 3y - 3y^2 + y^3 = 1 \quad + \quad 75$$

Ответ: 1.

~ 10.3

1) Т.к. каждый из ребят любит один вид сока, \Rightarrow тот, кто поднял руку за гранатовый – лжец, т.к. ~~все~~ ^{за} яблочный сок подняли все участники, \Rightarrow ему нравится апельсиновый сок, и он не поднимал за него руку, т.к. всегда лжет.

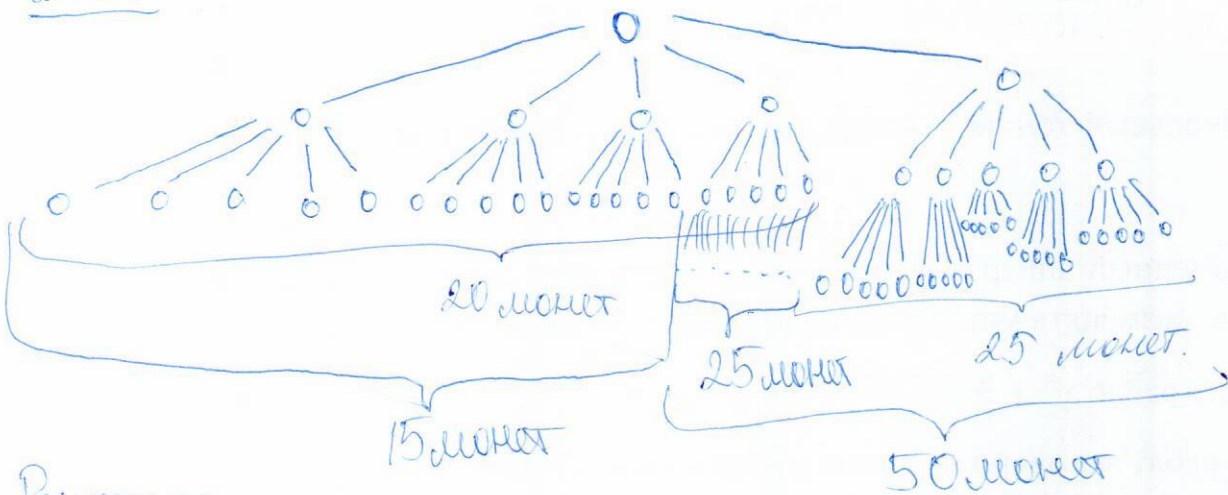
2) Какого ребят (помимо 10 = 5), которые подняли руки за апельсиновый, тоже являются лжецами, т.к. за яблочный сок руки подняли все участники, \Rightarrow им нравится гранатовый сок, и они не поднимали за него руки, т.к. всегда лгут.

3) $1 + 5 = 6$ – лжецов, $\Rightarrow 10 - 6 = 4$ – правдивца.

Ответ: 4 правдивца.

+ 75

№ 10.1



Решение:

~~50 монет~~ Сначала заменим данную монету на 5 других, затем из двух монет получим 10 монет. Заменяя каждую монету, получим 50 монет. Осталось 3 монеты, ^{еще} \Rightarrow у нас 53 монеты. Если ~~разменивать~~ разменять хотя бы ^{еще} одну монету, то количество монет будет больше 55 (~~так $53+5=58$, $58>55$~~ $53-1=52$ (т.к. одна монета меньше), $52+5=57$; $57>55$). Если не разменивать монеты, из которых получили 50 монет, то значение будет меньше 55. \Rightarrow При любом раскладе мы не сможем получить 55 монет (самое приближенное количество монет = 53).

Ответ: нельзя.

78

№ 10.5

Решение:

~~Нужно~~ Т.к. по условию задано из 81 вытканной ленты было 3 разноцветных, \Rightarrow в противном случае можно дать 1 синий, 1 синий и 79 зеленых, \Rightarrow 79-количество максимальное лент одного цвета в вытканной ленте, \Rightarrow чтобы было 2 разноцветных ленты, надо выткать 80 лент ($79+1=80$).

Ответ: 80 лент.

08

№ 10 161

1 2 3 4 5 итого
7 7 7 x x (21)

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

10 класс

10.1. Разменный аппарат меняет одну монету на 5 других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 55 монет?

10.2. Чему равно $x^3 + 3xy + y^3$, если $x + y = 1$?

10.3. 10 ребят договорились, что каждый из них будет либо лжецом (лжецы всегда лгут), либо правдивцем (правдивцы всегда говорят правду). Известно, что каждый из них любит ровно один вид сока: яблочный, апельсиновый или гранатовый. Сначала ведущий попросил поднять руки тех, кто любит яблочный сок, и все подняли руки, потом тех, кто любит апельсиновый сок – и половина игроков подняли руки, потом тех, кто любит гранатовый – и руку поднял только один игрок. Сколько правдивцев среди игроков?

10.4. В треугольнике MNK точки E и F расположены на сторонах MN и NK соответственно. Треугольник ENF остроугольный, и ER , FS – его высоты. Докажите, что если около четырехугольника $MEFK$ можно описать окружность, то $SR \parallel MK$.

10.5. Фокусник для выступления поместил в волшебную шляпу 100 лент: белые, синие, зеленые. При подготовки номера выяснилось, что из 81 вытащенной произвольным образом ленты, обязательно найдутся три разноцветных. И теперь фокусник думает, какое наименьшее число лент надо достать из шляпы, чтобы среди них точно было две разноцветных?

10.2 $x+y=1$
 $x^3+3xy+y^3 = x^3+y^3+3xy = (x+y)(x^2+xy+y^2)+3xy = 1(x^2+xy+y^2)+3xy = x^2+xy+y^2+3xy = x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2 = 1^2 = 1$
 Ответ: 1

10.1 Так при размене 1 монеты получается 5 \Rightarrow кол-во монет ~~не~~ увеличивается на 4 \Rightarrow любое число монет полученное после размена вычисляется по формуле $1+4n$, где $n \in \mathbb{N}$ и n – кол-во разменов \Rightarrow

\Rightarrow проверим, подходит ли в формулу $1+4n$ число 55: $1+4n=55 \quad 4n=54$
 $n=13,5$, но так $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
 \Rightarrow 55 не может вычисляться по этой формуле \Rightarrow разменный аппарат не может разменять 1 монету на 55
 Ответ: ~~не можно~~ невозможно

10.3. 1) т.к. ребят 10 \Rightarrow в первом голосовании проголосовали все \Rightarrow все правдивцы
мобот аблочный сок \Rightarrow в ~~остатившихся~~ оставшихся голосованиях участвует только
ижеу

Так у ижеу в последних двух голосованиях есть только 2 варианта отве-
та, т.к. они уже согласны в первом голосовании (они не мобот аблочный сок) \Rightarrow

\Rightarrow каждый ижеу в последующих двух голосованиях проголосовал лишь один
раз \Rightarrow кол-во ижеу = кол-ву проголосовавших в последних двух голосованиях =
 $= 5 + 1 = 6 \Rightarrow$ правдивцев $10 - 6 = 4$

Ответ: 4

+ 75