М93061 победитель 29б из 35б

все, по ч.з. → 10 83%

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

9 класс

9.1. Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем 111? Ответ объясните.

9.2. Чему равно $x^3 + 3xy + y^3$, если $x + y = 1$?

9.3. Существует ли трехзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию?

9.4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 6, а длина стороны AC – 8. Медианы BN и CM этого треугольника взаимно перпендикулярны. Найдите сторону BC треугольника ABC.

9.5. На полке стоят 666 книг по черной и белой магии, причем никакие 2 книги по белой магии не стоят через 13 книг (то есть между книгами по белой магии и не может стоять 13 книг). Какое наибольшее число книг по белой магии может стоять на полке?

№ 9.1

Существует 110 правильных дробей вида $\frac{x}{111}$, где $1 \le x \le 110$, $x \in N$. Дробь несократима, если x и 111 не имеют общих делителей: 3 и 37; до 110 есть 36 кратных числа 3, 2 кратных числа 37, значит $x \neq$ 38 или числам из 110. $110 - 38 = 72$

7б

Ответ: 72 дроби

№ 9.2

$x^3 + 3xy + y^3 = 1$, при $x + y = 1$, т.к.:

$x^3 + 3xy + y^3 = (x+y)^3 - (3x^2y - 3xy + 3xy^2) = (x+y)^3 - 3xy(x+y-1) =$

$= 1^3 - 3xy(1-1) = 1$

7б

№ 9.3

Рассмотрим трёхзначное число, как $x \cdot 100 \cdot y^0 + x \cdot 10 \cdot y^1 + x \cdot y^2$, где x – любая цифра, y – множитель прогрессии, $\in N$

$100x + 10xy + xy^2$

$x(100 + 10y + y^2)$ — делится на x, значит число составное

а если $x = 0$

Ответ: не существует.

1б

№ 9.5

В ряд можно поставить не больше 14 книг по белой магии, иначе 1ая не сможет стоять с 15ой, затем нужно прервать ряд, поставив 14 книг по чёрной магии, и так повторять:

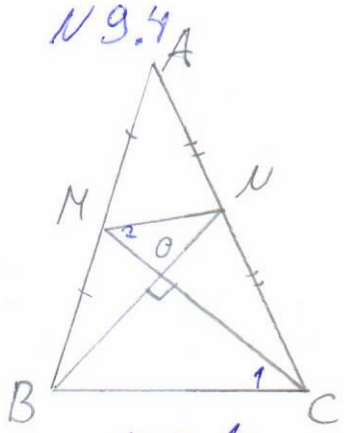
$666 : (14+14) = 23$ (ост. 22) $\quad 22 : 14 = 1$ (ост. 8)

Всего получится $23 \cdot 14 + \underset{\text{(из ост.)}}{14} = 336$ (книг)

Ответ: 336 книг

4/5

№ 9.4



Дано: $AB = 6$, $AC = 8$, $BN \perp CM$ - медианы

Найти BC

Решение:

1. MN - средняя линия (CM и BN - медианы)

$MN = \frac{1}{2}BC$, $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$, $MN \parallel BC$

2. $\triangle MON \sim \triangle BOC$ (по 2ум $\angle$)

$\angle O$ - вертик

$\angle 1 = \angle 2$ (м/л $\angle$ при $\parallel BC \parallel MN$ секущ. MC)

$\Downarrow$

$\frac{ON}{OB} = \frac{OM}{OC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$

3. $BO = 2ON$

$CO = 2OM$

По Th Пиф.:

$NC = \sqrt{ON^2 + 4OM^2}$

$MB = \sqrt{OM^2 + 4ON^2}$

$$\begin{cases} \sqrt{ON^2 + 4OM^2} = \frac{1}{2}AC = 4 \\ \sqrt{OM^2 + 4ON^2} = \frac{1}{2}AB = 3 \end{cases}$$

$$\text{"+"} \begin{cases} ON^2 + 4OM^2 = 16 \\ OM^2 + 4ON^2 = 9 \quad | \cdot (-4) \end{cases}$$

$-15ON^2 = -20 \quad | : (-15)$

$ON^2 = \frac{4}{3}$

$ON = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $OB = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$OM^2 = 9 - 4\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$OM^2 = 9 - \frac{48}{9}$

$OM^2 = 3\frac{2}{3}$

$OM = \frac{\sqrt{33}}{3}$; $OC = \frac{2\sqrt{33}}{3}$

По Th Пиф.:

$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{\frac{48}{9} + \frac{132}{9}} =$

$= \sqrt{\frac{180}{9}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Ответ: $BC = 2\sqrt{5}$

4/5

№193056

№9.4.

пример

28б из 35б. 80%

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

9 класс

9.1. Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем 111? Ответ объясните.

9.2. Чему равно $x^3 + 3xy + y^3$, если $x + y = 1$?

9.3. Существует ли трехзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию?

9.4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 6, а длина стороны AC – 8. Медианы BN и CM этого треугольника взаимно перпендикулярны. Найдите сторону BC треугольника ABC.

9.5. На полке стоят 666 книг по черной и белой магии, причем никакие 2 книги по белой магии не стоят через 13 книг (то есть между книгами по белой магии и не может стоять 13 книг). Какое наибольшее число книг по белой магии может стоять на полке?

Решения:

9.1. Представим правильные дроби со знаменателем 111 в виде $\frac{n}{111}$, где $1 \le n \le 110, n \in N$. Чтобы дробь была сократимой у числителя и знаменателя должен быть общий множитель $\neq 1$. Разложим 111 на множители. $111 = 3 \cdot 37$, 2 множителя

Значит, чтобы дробь $\frac{n}{111}$ была сократимой можно рассмотреть 2 случая:

1 Случай: $n = 3k$, где $1 \le k \le 36, k \in N$ (т.к. если $k = 37$, то $\frac{111}{111}$ - неправильная дробь). $\Rightarrow$ Есть 36 правильных сократимых дробей $\frac{n}{111}$, где $n = 3k$, т.к. $\frac{3k}{111} = \frac{k}{37}$.

2 Случай: $n = 37p$, где $1 \le p \le 2, p \in N$ (т.к. если $p = 3$, то $\frac{111}{111}$ - неправильная дробь) $\Rightarrow$ Есть 2 правильных сократимых дроби $\frac{n}{111}$, где $n = 37p$, т.к. $\frac{37p}{111} = \frac{p}{3}$.

Также заметим, что в 2х случаях нет совпадающих дробей.

Тогда, т.к. правильных дробей со знаменателем 111 всего 110 (т.к. $1 \le n \le 110$), то число правильных несократимых дробей со знаменателем 111 будет равно 110 минус число правильных сократимых дробей со знаменателем 111.

$110 - (36 + 2) = 72$.

7б

Ответ: существует всего 72 правильных несократимых дроби со знаменателем 111.

9.2. $x + y = 1$; $x^3 + 3xy + y^3 = (x^3 + y^3) + 3xy = \overset{\text{замена } x+y=1}{(x+y)}(x^2 - xy + y^2) + 3xy = x^2 - xy + y^2 + 3xy =$
$= x^2 + 2xy + y^2 = \overset{\text{замена } x+y=1}{(x+y)^2} = (1)^2 = 1.$

7б

Ответ: 1.

9.3. Рассмотрим трёхзначное число, цифры которого ~~представляют~~ образуют арифметическую прогрессию в общем виде:

$\overline{abc}$, где $a, b, c \in N$ и $1 \le a \le 9$, $0 \le b \le 9$, $0 \le c \le 9$.

Т.к. цифры числа ~~представляют а~~ образуют арифметическую прогрессию, то их можно записать в виде $a = a + 0n$; $b = a + 1 \cdot n$; $c = a + 2 \cdot n$, где $n \in Z$ и $|n|$ не превышает 4, т.к. если $|n| > 4$, то $c = a + 2 \cdot n$, при $\forall a$ не будет выполн. усл. $0 \le c \le 9$

Рассмотрим сумму цифр этого числа:

$a + b + c = (a) + (a+n) + (a+2n) = 3a + 3n = 3(a+n)$, где $a+n$ – целое число и 3 – целое число $\Rightarrow$ ~~Это признаку делимости числа на 3~~ число $\overline{abc}$ кратно 3, т.е. делится на 3 нацело, значит число $\overline{abc}$ не является простым, т.к. по определению простое число делится ~~либо~~ нацело только на 1 или на само себя, ~~а т.к. число 3 не т~~

Получили, что любое трёхзначное число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию, не является простым

7б

Ответ: не существует.

9.5. Рассмотрим случай, когда 14 книг по белой магии (Б) стоят подряд: тогда между любыми двумя из них стоит не более 12 книг $\Rightarrow$ такое расположение возможно. Однако каждая из ~~белых книг~~ Б ~~занимает~~ отнимает место через 13 книг от себя, т.е. на нём обязана стоять ~~чё~~ книга по чёрной магии (Ч) $\Rightarrow$ при такой расстановке получим 14 Б подряд, за ними 14 Ч подряд, значит ~~в~~ ~~ср~~ среди любых стоящих подряд 28 книгах не более 14 Б.

$666 : 28 = 23$ (и 22 – остаток). Т.к. наша схема расстановки выглядит так:

$\underbrace{14Б\,14Ч\,14Б\,14Ч \ldots 14Б\,14Ч}_{23\text{ раза}}$ + еще 22 книги, то мы знаем, что в первых ~~28·23 = 560 книг~~

$23 \cdot 28 = 644$ книгах не более $23 \cdot 14 = 322$ Б, и т.к. мы можем расставить их так, что последними в 23 повторах будут 14 Ч, то в 22 оставшихся можно поставить 14 Б.

7б

Итак, на полке может стоять не более $322 + 14 = 336$ Б.

Ответ: 336.

9.4. X

: 23 блока и 1 строчка Б
1ом блоке 14 Б книг, ⟹
наибольшее кол-во Б книг =
23 · 14 + 14 = 336 (книг)
вет: 336 книг

несократимая дробь
и: кол-во таких дробей
Решение:
е отрицательное, т.к. иначе
можно сократить на −1
$= \frac{-1 \cdot x}{111} = -1 \cdot \frac{x}{111} = -\frac{x}{111}$
0, т.к. иначе дробь принима-
начение =0
0; $\frac{0}{111} = 0$
чит $x > 0$
дробь несократимая, значит
'11, потому что если иначе
дробь сокращается

призер

М 93605

9.1	9.2	9.3	9.4	9.5
0б	7б	X	6б	7б

20б из 35б
57%

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике.

9.5 7б.

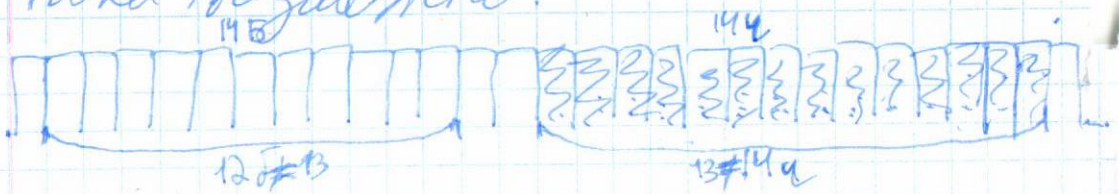
книги по { Б. белой, Ч. черной } полки } = 666 книг

Между книгами по белой полки не может стоять 13 книг

Найти: наибольшее кол-во Б. книг

Решение:

Т.к. расстояние между 2мя Б. книгами ≠ 13 книгам, значит После постановки 14 Б. книг (максимальное число Б. книг подряд, которое позволяет условие (13 Б книг — расстояние 2Б книг полки отсчета ⇒ 13+2=15, значит количество книг подряд ≠ 15)) ставим ещё 14 черных (Ч) и так пока возможно:



Если мы возьмём меньше то расстояние между Б книг ~~[illegible]~~ ~~последн~~ в порядке, 14 кн ми стоящими в подряд порядке будет = 13 книгам противоречит условию если взять больше, то Б станет меньше

Посчитаем сколько книг в ком блоке:

14Б+14Ч=28 (книг).

Теперь узнаем сколько таких блоков среди всех книг:

666 : 28 = 23 (блока) и 22 книги

Наш блок оканчивается на Ч книги, ⇒ потом идёт 14 Б. Т.к. 14<22, ⇒ среди 22 книг можно поставить ещё одну строчку Б книг = 14, з

$x = 112$ $x = 222$ $x = 1110$

Трунов Арсений 9 класс

$\frac{111}{111} = 1$ $\frac{112}{111} = 1\frac{1}{111}$ $\frac{222}{111} = 2$ $\frac{1110}{111} = 10$

Т.к. 111 - это не простое число, => его делителями $\in N$ явл. числа: 1 и 111

1

$111 : 3 = 37$

При 1 дробь не сокращается, а при 111 сокращается, значит $0 < x < 111$

Из этого следует, что $x \in N$ и $x < 111$, значит кол-во $x = 111 - 1 = 110$ ~~дробей~~

Ответ ~~110 дробей~~

0б

9.2 НЗВ - ?

$x + y = 1$; $x = 1 - y$

$x^3 + 3xy + y^3$

$x = 1 - y$

$(1-y)^3 + 3y(1-y) + y^3 = (1-y)(1-y)^2 + 3y(1-y) + y^3 = (1-y)(1-2y+y^2) + 3y(1-y) + y^3 = (1-y) \cdot$

4

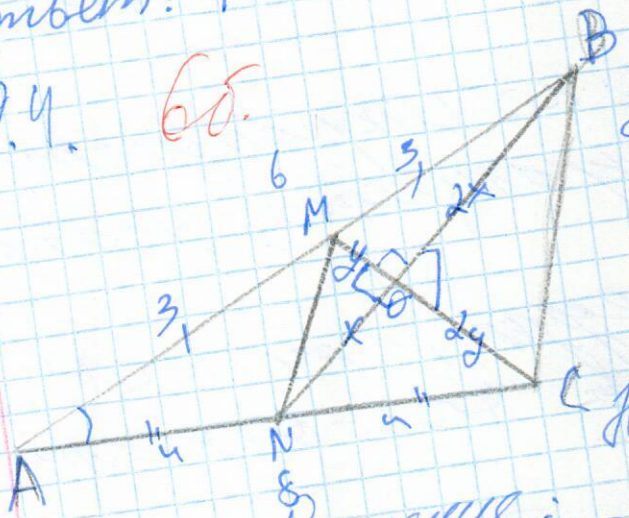
$\cdot (1-2y+y^2+3y)+y^3=(1-y)(1+y+y^2)+y^3$

$=1+\cancel{y}+\cancel{y^2}-\cancel{y}-\cancel{y^2}-\cancel{y^3}+\cancel{y^3}=1$

$x^3+3xy+y^3=1$

Ответ: 1 7б.

9.4. 6б.



Дано: $\triangle ABC$; $AB=6$; $AC=8$, медианы BN и OM взаимно $\perp$

Найти: BC

Решение:

1) Обозначим т. Для каждой т. т. O

2) Т.к. медианы: т. Пя в отнош.

$\frac{2}{1}$ от верш.:

$\frac{BO}{ON}=\frac{2x}{x}$; $\frac{CO}{OM}=\frac{2y}{y}$

3) Р: $\triangle NOC$ - прямоуг. (по опр.)

По Th Пифагора: $NO^2+OC^2=NC^2$

$x^2+4x^2=16$

Р: $\triangle MOB$ - прямоуг. ($BO \perp MO$)

По Th Пифагора

$MO^2+OB^2=MB^2$

$y^2+4x^2=9$

5

?! Составим и решим систему:

Трушкат Арсений

$$\begin{cases} 9x^2+4y^2=16 \\ 4x^2+y^2=9 \end{cases} \quad \Big| \cdot(-4)$$

$$-15x^2=-20 \;\Big|:(-15)$$

$$x^2=1{,}25 \text{ в 2)}$$

$$4\cdot 1{,}25+y^2=9$$

$$y^2=4$$

$$-16x^2-4y^2=-36$$

$$\frac{\cancel{20}^{4}}{\cancel{15}_{3}} \quad \frac{4}{3}$$

$$\frac{16}{3}+y^2=9$$

$$y^2=9-5\frac{1}{3}=3\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$$

$$\frac{4}{3}+\frac{44}{3}=\frac{48}{3}=16$$

4) Р: $\triangle BOC$ – прямоуг ($BO \perp CM$)

По Th Пифагора:

$$BO^2+OC^2=BC^2$$

$$BC=\sqrt{4x^2+4y^2}=\sqrt{4\cdot 1{,}25+4\cdot 4}=\sqrt{21}$$

$$\frac{16}{3}+\frac{44}{3}=\frac{60}{3}$$

$$\frac{16}{3}+\frac{44}{3}=\frac{60}{3}=20$$

Ответ: $\sqrt{21}$

№92164 18б / 51,4%.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

9 класс

9.1. Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем 111? Ответ объясните.

9.2. Чему равно $x^3 + 3xy + y^3$, если $x + y = 1$?

9.3. Существует ли трехзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию?

9.4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 6, а длина стороны AC – 8. Медианы BN и CM этого треугольника взаимно перпендикулярны. Найдите сторону BC треугольника ABC.

9.5. На полке стоят 666 книг по черной и белой магии, причем никакие 2 книги по белой магии не стоят через 13 книг (то есть между книгами по белой магии и не может стоять 13 книг). Какое наибольшее число книг по белой магии может стоять на полке?

9.1. 3б.

111 : 3

Всего правильных несократимых дробей со знаменателем 111 : 110.

Среди чисел от 1 до 110, кратных 3 – 30.

Если будет дробь с числителем и знаменателем, кратными 3, то дробь - сократимая.

Значит, несократимых будет : 110 – 30 = 80 дробей. Ответ: 80 дробей.

9.5.

Чтобы 2 книги по белой магии не стояли через 13 книг, их нужно ставить по 14 книг, начиная с книг по белой магии. Затем нужно узнать, сколько будет таких стопок книг по 14 : 666 : 14 = 47 (ост. 8). 47 - нечётное число, поэтому, если начинать с книг по белой магии, то и закончи~~вать~~тся книги. Теперь узнаем, сколько стопок книг по белой магии : 47 : 2 = 23 (ост. 1 — последняя стопка по белой магии), т.е. их будетъ 24. Всего книг по белой магии получается 24 · 14 = 336. 7б.

Ответ: 336 книг.

9.2. 7б

$x + y = 1$

$x = 1 - y$

Подставляем:

$(1-y)^3 + 3(1-y)\cdot y + y^3 = 1 - 3y + 3y^2 - y^3 + 3(y - y^2) + y^3 = 1 \cancel{-3y} \cancel{+3y^2} \cancel{-y^3} \cancel{+3y} \cancel{-3y^2} \cancel{+y^3} = 1.$

Ответ: 1.

9.3.

Арифметическая прогрессия: $1^2; 2^2; 3^2; 4^2; 5^2; 6^2; 7^2 \ldots$

$\quad\quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36 \quad 49 \ldots$

Двузначные числа не подходят, т.к. выходят за рамки 3-значного числа.

Т.е. подходят $\underset{1}{\underset{\shortparallel}{1^2}}; \underset{4}{\underset{\shortparallel}{2^2}}; \underset{9}{\underset{\shortparallel}{3^2}}$

Итого число получается 149 - простое.

Ответ: 149 (существует).